

Linguagens Livres de Contexto



Roteiro

- Gramáticas livres de contexto
- Representação de linguagens livres de contexto
- Formas normais para gramáticas livres de contexto
- Gramáticas ambíguas
- **Autômatos de Pilha**
- Conversão de gramáticas livres de contexto para autômatos de pilha
- Exercícios



Autômatos com Pilhas

- Autômatos com Pilhas (**AP**) são **definições alternativas** para Linguagens Livre de Contexto (**LLC**). Para as LR's existem os AF's, GR's e ER's



Autômatos com Pilhas

- Hierarquia das linguagens

L Recursivamente Enumeráveis/Máquinas de Turing que Reconhecem L

L Recursivas/Máquinas de Turing que Decidem L

L Livres de Contexto/Autômatos a Pilha não Determinísticas

L Livres de Contexto Determinísticas/
Autômatos a Pilha Determinísticas

L Regulares/Autômatos Finitos



Autômatos com Pilhas

- *AP versus AF*

- AP têm o seu **poder de reconhecimento estendido**, quando comparado ao dos AF, justamente pela disponibilidade e pela utilização de uma **memória auxiliar** organizada na forma de uma **pilha**;
- A **pilha** de um AP é uma estrutura de dados, de capacidade **ilimitada**, na qual a máquina de estados é capaz de **armazenar**, **consultar** e **remover** símbolos de um alfabeto próprio, denominado **alfabeto de pilha**. Demais características e componentes se assemelham com os AF's.
 - A **pilha** pode ser lida, aumentada e diminuída apenas no topo (FIFO)



Autômatos com Pilhas

- Definição para o AP

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Pi, q_0, Z_0, F)$$

Q conjunto de estados possíveis do autômato, o qual é finito;

Σ alfabeto de símbolos de entrada;

Γ alfabeto de símbolos de pilha;

Π função programa ou de função de transição:

$$\Pi: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma}$$

q_0 estado inicial do AP, tal que q_0 é elemento de Q ;

Z_0 símbolo inicial da pilha, tal que Z_0 é elemento de Γ ;

F conjunto de estados finais, tal que F está contido em Q ;



Autômatos com Pilhas

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Pi, q_0, Z_0, F)$$

- Componentes que merecem destaque
 - Γ alfabeto de símbolos de pilha
 - Especifica os símbolos que podem ser armazenados na pilha.
 - Z_0 símbolo inicial da pilha, tal que Z_0 é elemento de Γ
 - Um desses símbolos de Γ representam o conteúdo inicial da pilha;
- AP's escolhem uma transição analisando o símbolo atual na cadeia de entrada, o estado atual e o topo da pilha.



AP – configuração inicial

- Configuração inicial:
 - AP se encontra no estado q_0 ;
 - cursor se encontra posicionado sob a célula mais à esquerda na fita de entrada X ;
 - conteúdo da pilha é Z_0 ;
- A configuração de um AP é representado por:
 (q, α, γ) , com $q \in Q$, $\alpha \in \Sigma^*$ e $\gamma \in \Gamma^*$
- A configuração inicial para o reconhecimento de uma cadeia w é dado por:

$$(q_0 w, Z_0)$$



AP – possibilidades de movimentação

- Determinadas a partir de três informações:
 - o seu estado corrente;
 - o símbolo presente na cadeia de entrada;
 - e o símbolo armazenado no topo da pilha.

- Após a movimentação:
 - Consome da entrada o símbolo que ele utiliza na transição. Se ϵ for usado, nenhum símbolo da entrada é consumido.
 - Vai para um novo estado, que pode ou não ser o mesmo estado anterior.
 - Substitui o símbolo do topo da pilha por qualquer cadeia. A cadeia pode ser ϵ (eliminação na pilha); pode ser o mesmo símbolo do topo (nenhuma alteração) ou um ou mais símbolos distintos (eliminação + inserção).



AP – possibilidades de movimentação

- Possibilidades de movimentação - **classificação**
- AP determinístico
 - Uma única possibilidade de movimentação a partir de uma configuração.
- AP não-determinístico
 - Mais de uma opção de movimentação.



AP – configuração final

- Caracterizada de duas maneiras distintas, porém equivalentes.

- Na **primeira** delas, exige-se o esgotamento da cadeia de entrada e também que o **AP atinja um estado final**. O **conteúdo final da pilha é irrelevante**. Linguagem aceita pelo AP é denotada por:

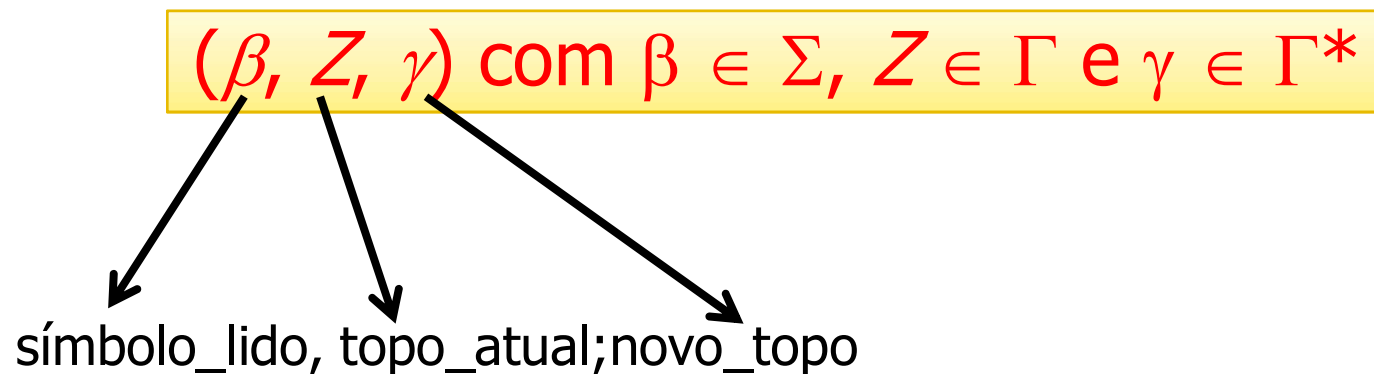
$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow (q, \varepsilon, \gamma), \text{ com } q \in F \text{ e } \gamma \in \Gamma^*$$

- Na **segunda** caracterização, exige-se o esgotamento da cadeia de entrada e também que a **pilha tenha sido completamente esvaziada**, não importando que o estado atingido seja final ou não-final.

$$(q_0, w, Z_0) \Rightarrow (q, \varepsilon, \varepsilon), \text{ com } q \in Q$$

AP – representação por diagrama de estados

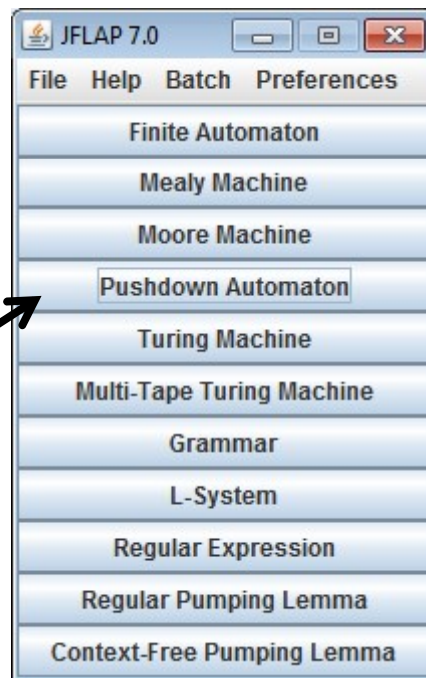
- Em um AP as transições de p para q são rotulados da seguinte forma:



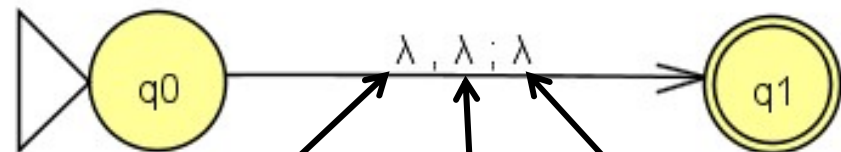
- Convencionalmente, Z_0 é o símbolo da pilha (no JFLAP é Z).

AP – Exemplo

- AP que reconhece a expressão $x+y$ ou $(x+y)$ → aceitação por estado final



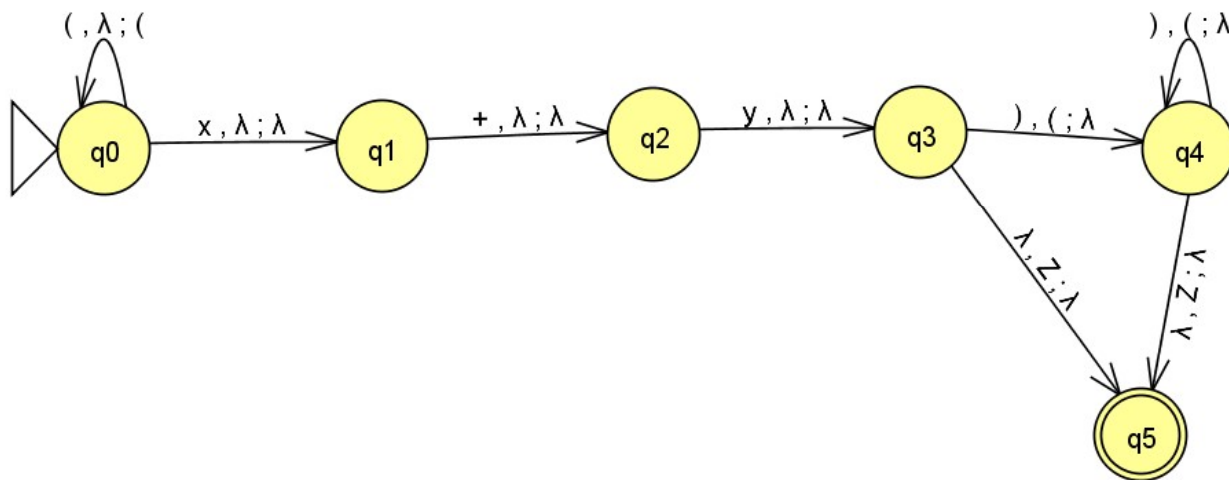
Qual a estratégia de resolução?



símbolo_lido, topo_atual; novo_topo

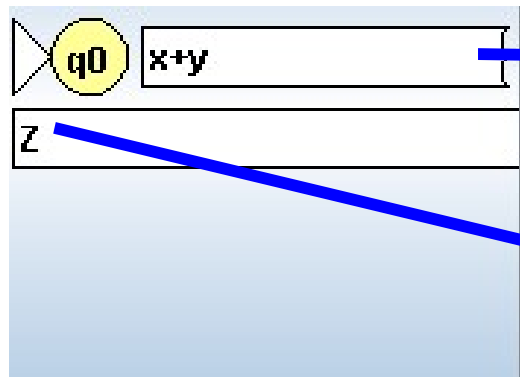
AP – Exemplo

- AP que reconhece a expressão $x+y$ ou $(x+y)$ → aceitação por estado final



Input	
(x+y)	Accept
(((x+y)))	Accept
((x+y)	Reject
x+y)	Reject
x+y	Accept
(x+y	Reject

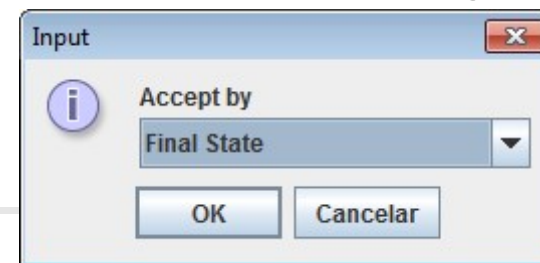
símbolo, topo_antigo;novo_topo



Entrada $x+y$

Conteúdo inicial da ***pilha***

Forma de aceitação





AP – EXERCÍCIO

1. Dado o AP= $(\{p,q\}, \{0,1\}, \{Z_0,X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ formado pelas transições:

- $\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
- $\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$
- $\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$
- $\delta(q, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
- $\delta(p, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
- $\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$
- $\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \epsilon)\}$

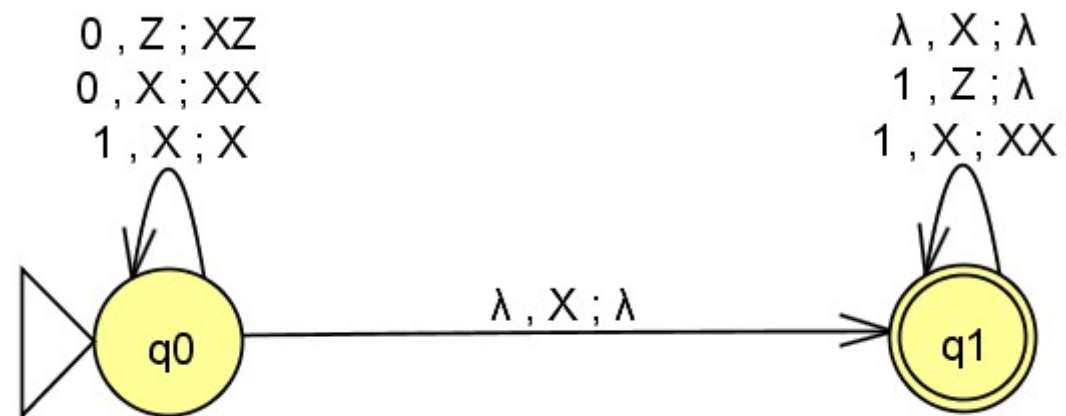
Def. AP = $(Q, \Sigma, \Gamma, \Pi, q_0, Z_0, F)$

- 1.1. Construa o AP graficamente (lembrando que Z_0 é representado apenas por Z no JFLAP)
- 1.2. Verifique se as cadeias a seguir estão em $L(AP)$: (a) 01 (b) 0011 (c) 010
- 1.3. O AP é determinístico ou não determinístico? Reconhece por estado final ou por pilha vazia?
- 1.4. Qual a linguagem que o AP reconhece?

EXERCÍCIO - resposta

2. Dado o AP= $(\{p,q\}, \{0,1\}, \{Z_0,X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ formado pelas transições:

- $\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
- $\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$
- $\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$
- $\delta(q, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
- $\delta(p, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$
- $\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$
- $\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \epsilon)\}$



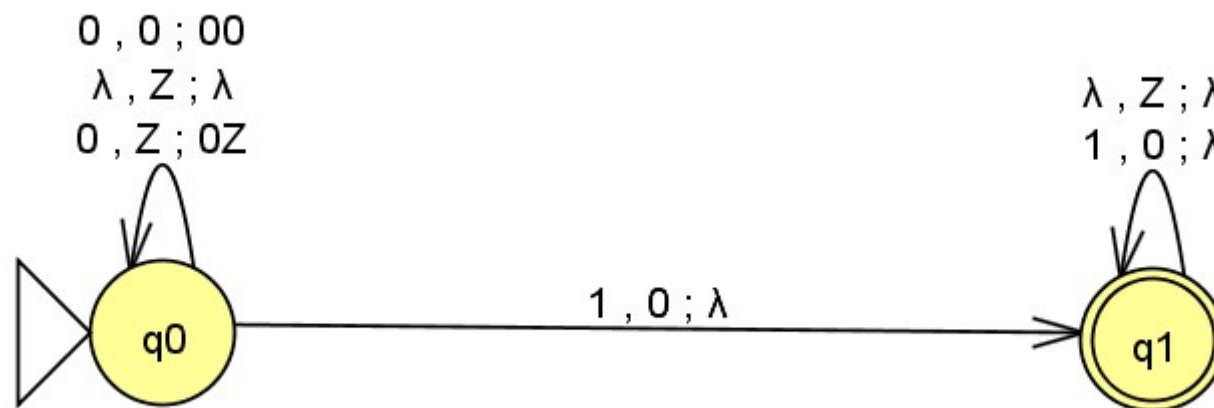


AP – EXERCÍCIOS

- 2. $L = \{0^n 1^n; n > 0\}$ e aceitação por pilha vazia. Ideia: empilhar todos os 0's e desempilhe-os ao encontrar sua contraparte de 1's

AP – EXERCÍCIOS

- 2. $L = \{0^n 1^n; n > 0\}$ e aceitação por pilha vazia. Ideia: empilhar todos os 0's e desempilhe-os ao encontrar sua contraparte de 1's





Roteiro

- Gramáticas livres de contexto
- Representação de linguagens livres de contexto
- Formas normais para gramáticas livres de contexto
- Gramáticas ambíguas
- Autômatos de Pilha
- **Conversão de gramáticas livres de contexto para autômatos de pilha**
- Exercícios



De gramáticas livres de contexto para autômatos de pilha

- *Seja G uma GLC, então é possível definir um autômato de pilha não-determinístico M , com critério de **aceitação** baseado em **pilha vazia**, de modo que $V(M) = L(G)$.*
- **Entrada**: uma GLC $G = (V, T, P, S)$;
- **Saída**: um APND $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q, S, F)$ com critério de aceitação de pilha vazia, tal que $V(M) = L(G)$;

De gramáticas livres de contexto para autômatos de pilha

■ Método:

1. $Q \leftarrow \{V\};$

2. $\Gamma \leftarrow V;$

3. $F \leftarrow \emptyset;$ // aceitação por pilha vazia

4. Função de transição:

a) $\delta \leftarrow \emptyset;$

b) $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \gamma) \mid A \rightarrow \gamma \in P\}, A \in N, \gamma \in V^*;$

c) $\delta(q, \alpha, \alpha) = \{(q, \varepsilon)\}, \alpha \in \Sigma.$

o alfabeto da pilha é o próprio vocabulário V (não-terminais) da gramática

$$\text{GLC } G = (V, T, P, S)$$



De gramáticas livres de contexto para autômatos de pilha

- AP's construídos segundo este critério operam através da repetida substituição dos símbolos não-terminais no topo da pilha, sem consumo de símbolos da fita de entrada, até que surja um símbolo terminal do topo da pilha.
- Nesta configuração, a sua remoção é condicionada à presença do mesmo símbolo na posição de leitura correntemente apontada pelo cursor da fita de entrada.
- AP's construídos segundo este critério também **simulam a sequência de derivações mais à esquerda** que seria feita pela gramática correspondente na geração da mesma sentença.

De gram autôm

1. $Q \leftarrow \{V\};$
2. $\Gamma \leftarrow V;$
3. $F \leftarrow \emptyset;$
4. Função de transição:
 - a) $\delta \leftarrow \emptyset;$
 - b) $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \gamma) \mid A \rightarrow \gamma \in P\}, A \in N, \gamma \in Vn^*;$
 - c) $\delta(q, \alpha, \alpha) = \{(q, \varepsilon)\}, \alpha \in \Sigma.$

A escolha da produção a ser aplicada depende apenas do não-terminal presente no topo da pilha. Exemplo:

$A \rightarrow \alpha\gamma 1$ e $A \rightarrow \alpha\gamma 2$

geram $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \alpha\gamma 1), (q, \alpha\gamma 2)\}$

Gramática

$P = \{E \rightarrow T \mid TZ,$
 $T \rightarrow F \mid FY,$
 $F \rightarrow (E) \mid a,$
 $Y \rightarrow *F \mid *FY,$
 $Z \rightarrow +T \mid +TZ\}$

AP

$\{(q, \varepsilon, E) \rightarrow \{(q, T), (q, TZ)\},$
 $(q, \varepsilon, T) \rightarrow \{(q, F), (q, FY)\},$
 $(q, \varepsilon, F) \rightarrow \{(q, (E)), (q, a)\},$
 $(q, \varepsilon, Y) \rightarrow \{(q, *F), (q, *FY)\},$
 $(q, \varepsilon, Z) \rightarrow \{(q, +T), (q, +TZ)\},$
 $(q, a, a) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, (, () \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q,), ()) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, +, +) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, *, *) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, \varepsilon, Z0) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\}$
 $\}$

Transições de contexto para pilha

$\{(q, \varepsilon, E) \rightarrow \{(q, T), (q, TZ)\},$
 $(q, \varepsilon, T) \rightarrow \{(q, F), (q, FY)\},$
 $(q, \varepsilon, F) \rightarrow \{(q, (E)), (q, a)\},$
 $(q, \varepsilon, Y) \rightarrow \{(q, *F), (q, *FY)\},$
 $(q, \varepsilon, Z) \rightarrow \{(q, +T), (q, +TZ)\},$
 $(q, a, a) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, (, () \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q,), ()) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, +, +) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, *, *) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\},$
 $(q, \varepsilon, Z0) \rightarrow \{(q, \varepsilon)\}$
 $\}$

$\lambda, Z; \lambda$
 $*, *; \lambda$
 $+, +; \lambda$
 $),); \lambda$
 $(, (; \lambda$
 $a, a; \lambda$
 $\lambda, Z; +TZ$
 $\lambda, Z; +T$
 $\lambda, Y; *FY$
 $\lambda, Y; *F$
 $\lambda, F; a$
 $\lambda, F; (E)$
 $\lambda, T; FY$
 $\lambda, T; F$
 $\lambda, E; TZ$
 $\lambda, E; T$

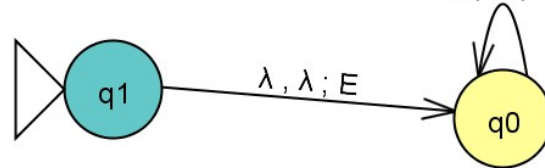


Table Text Size

Input	Result
a	Accept
(a)	Accept
(a+a)	Accept
(a+)	Reject

aceitação de pilha vazia



AP – EXERCÍCIOS

3. Converta a gramática $S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$ em um AP. A ideia é simular as derivações mais à esquerda com o AP. Qual a linguagem reconhecida?

■ Passos:

1. A primeira transição empilha SZ de modo que se possa testar pilha vazia (Z), e também iniciar a simulação (S) $\rightarrow \varepsilon, \varepsilon; S$
2. Possibilite push/pop de terminais de modo que se possa ler qualquer string de terminais gerado . Ex: $a, a; \varepsilon$
3. Simule todas as produções adicionando transições sem leitura. Ex: $\varepsilon, S; aSa$

AP – E

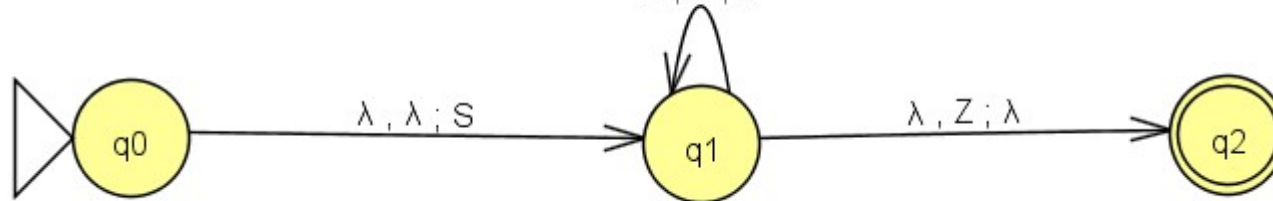
1. $Q \leftarrow \{V\};$
2. $\Gamma \leftarrow V;$
3. $F \leftarrow \emptyset;$
4. Função de transição:
 - a) $\delta \leftarrow \emptyset;$
 - b) $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \gamma) \mid A \rightarrow \gamma \in P\}, \forall A \in N, \gamma \in Vn^*;$
 - c) $\delta(q, \alpha, \alpha) = \{(q, \varepsilon)\}, \forall \alpha \in \Sigma.$

3. Converta a gramática $S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$ em um AP. A ideia é simular as derivações mais à esquerda com o AP.

A escolha da produção a ser aplicada depende apenas do não-terminal presente no topo da pilha. Exemplo:

$A \rightarrow \alpha\gamma_1$ e $A \rightarrow \alpha\gamma_2$
 geram **$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \alpha\gamma_1), (q, \alpha\gamma_2)\}$**

$\lambda, S; aSa$
 $\lambda, S; \lambda$
 $\lambda, S; b$
 $\lambda, S; a$
 $\lambda, S; bSb$
 $a, a; \lambda$
 $b, b; \lambda$





AP – EXERCÍCIOS

4. Converta a gramática abaixo em um AP (por pilha vazia ou estado final). Qual a linguagem gerada?

$G = (\{P, A, B\}, \{a, b, c\}, R, P)$

Regras R:

$P \rightarrow ABA$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$

AP – EXERCÍCIOS

4. Converta a gramática abaixo em um AP (por pilha vazia ou estado final). Qual a linguagem gerada?

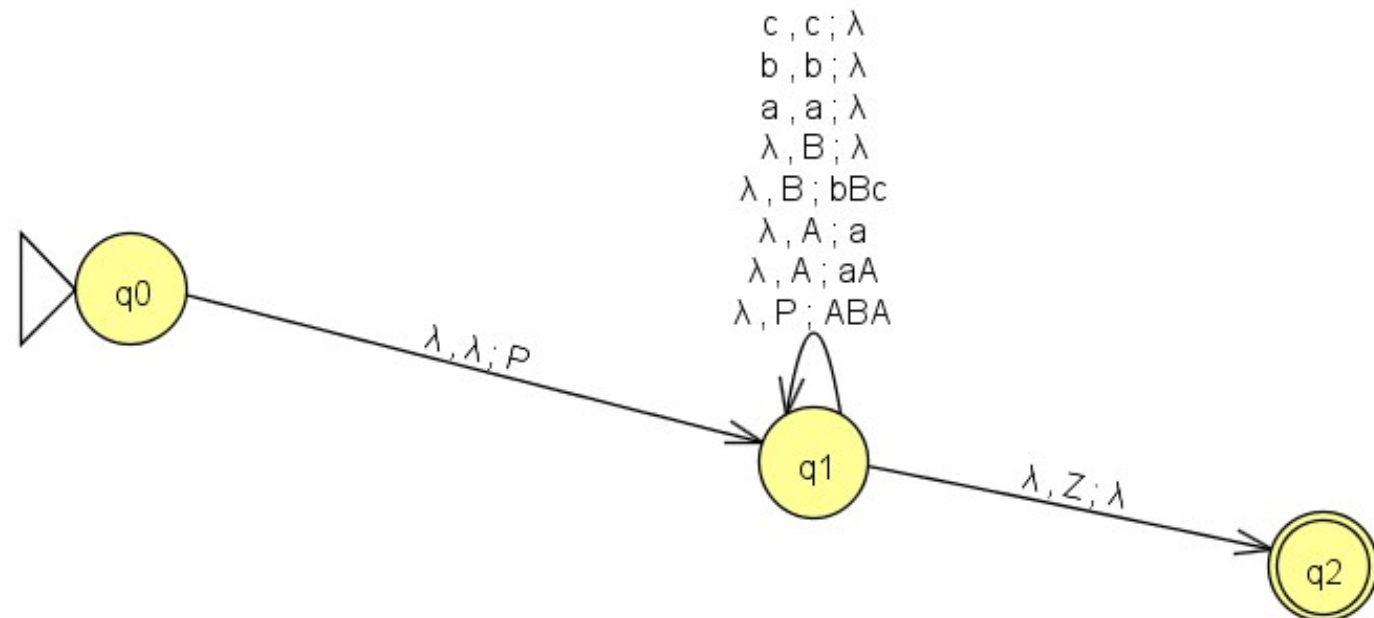
$G = (\{P, A, B\}, \{a, b, c\}, R, P)$

Regras R:

$P \rightarrow ABA$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$





AP – EXERCÍCIOS

5. Forneça um AP (aceitação por pilha vazia) para a seguinte linguagem:

$$L(AP) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

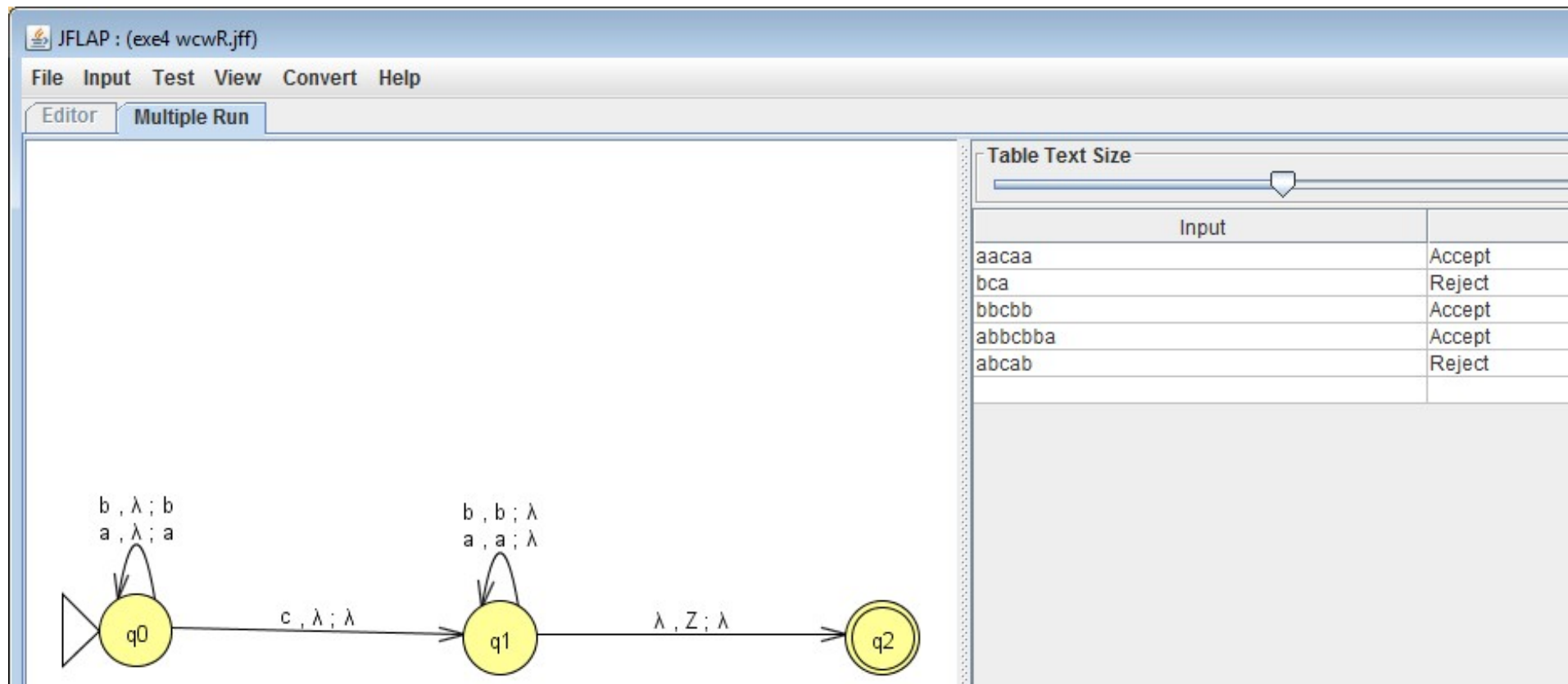
Dica:

- antes de ler o **c** empilhe qualquer símbolo lido;
- ao encontrar o **c** leia os símbolos restantes garantindo que cada novo símbolo lido é idêntico ao símbolo desempilhado;
- se pilha vazia, aceite, c.c., rejeite.

AP – EXERCÍCIOS

5. Forneça um AP para a seguinte linguagem:

$$L(AP) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$





Exercícios (1/2)

6. Projete um AP para aceitar cada uma das linguagens a seguir (por estado final ou por pilha vazia, o que for mais conveniente):
 - a) $\{0^N 1^N \mid N \geq 1\}$
 - b) O conjunto de todas as cadeias de 0s e 1s tais que nenhum prefixo tenha mais 1s do que 0s.
 - c) o conjunto de todas as cadeias de 0s e 1s com um número igual de 0s e 1s.

7. Construa uma gramática livre de contexto G para a linguagem $L(G) = \{w=xayb \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$. Em seguida, utilizando o algoritmo apresentado, construa o AP.

8. Construa gramáticas que gerem as linguagens abaixo. Posteriormente, construa os AP's.
 - (a) $\{a^i b^j \mid j \neq i\}$
 - (b) $\{a^i b^j \mid j < i \text{ ou } j > 2i\}$
 - (c) $\{a^i b^j \mid i \leq j \leq 2i\}$
 - (d) $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i\}$



Exercícios (2/2)

9. Dê um APND (AP não-determinístico) que aceite a linguagem dos parênteses casados pelo estado final. Exemplo:

$$S \rightarrow ()$$
$$S \rightarrow (S)$$
$$S \rightarrow SS$$

10. Dado o seguinte conjunto de produções:

$$S \rightarrow aA$$
$$A \rightarrow aB$$
$$B \rightarrow aB \mid bC$$
$$C \rightarrow cC \mid cD$$
$$D \rightarrow c$$

Escreva o autômato a pilha que processa $L(G)$. Qual a ling. gerada?