

# ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE SISTEMAS COM A FINALIDADE DE GEORREFERENCIAR OBRAS DE ENGENHARIA

JEFFERSON TEIXEIRA BRASIL MORAIS JÚNIOR  
IRINEU DA SILVA

Universidade de São Paulo - USP  
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC  
Departamento de Engenharia de Transportes, São Carlos – SP  
jefferson.brasil@usp.br  
irineu@sc.usp.br

**RESUMO** – Pelo fato dos projetos de engenharia civil, atualmente, serem elaborados por meios informatizados e em ambiente CAD, o engenheiro determina facilmente os valores das coordenadas de qualquer elemento geográfico representado no projeto, o que simplifica enormemente a tarefa de implantá-los no terreno. Para tanto, tem-se utilizado, cada vez mais, instrumentos GNSS operando em modo diferencial RTK, pela sua facilidade operacional e rapidez nos resultados. Ocorre, porém, que em muitos casos, o sistema de coordenadas cartesiano plano do projeto não é compatível com o sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas do sistema GNSS, exigindo uma transformação de coordenadas para compatibilizá-los. Assim, pelo fato de haver na literatura diversos métodos de transformação que podem ser utilizados para essa compatibilização, este artigo discute as diferenças analíticas entre eles e apresenta um estudo de caso em que se comparam os resultados do uso da transformação de coordenadas geodésicas para o sistema topográfico local, utilizando as recomendações da NBR 14.166/98, e posterior volta para o sistema geodésico, utilizando métodos de transformação de coordenadas entre sistemas cartesianos planos, de acordo com as recomendações para uso dos instrumentos GNSS operando em modo diferencial RTK.

**Palavras chave:** Geomática, Transformação de Coordenadas, Implantação, Estação Total, GNSS.

**ABSTRACT** – Because civil engineering projects are currently developed by computational means and in CAD environment, civil engineers can easily determine coordinate values of any geographical element represented in the project, what greatly simplifies the setting-out procedures, mainly when using GNSS instruments in RTK differential mode. However, it is important to consider that, in many cases; the project's coordinate system and the GNSS's coordinate system are not compatible, requiring a coordinate transformation. This paper discusses the analytical differences between them and presents a case study comparing the results of the use of geodetic coordinate transformation to local coordinate system, based on the NBR 14.166/98 recommendations. Next, to allow the use GNSS instruments operating in RTK differential mode, it is performed a reverse coordinate transformation according to the GNSS instrument producers recommendations.

**Key words:** Geomatic, Coordinate Transformation, Setting-Out, Total Station, GNSS.

## 1 INTRODUÇÃO

Se por um lado a transformação de coordenadas é um assunto abordado e esclarecido na literatura, por outro, esse conhecimento parece ter sido menosprezado ao longo do tempo por muitos profissionais da Geomática.

Com os avanços tecnológicos e a popularização do uso de equipamentos que utilizam a tecnologia GNSS, os

conceitos referentes aos sistemas de referência e de coordenadas devem ser tratados com mais atenção, visto que estes equipamentos vêm sendo utilizados, com maior frequência na implantação de pontos em obras de engenharia e possuem referenciais distintos daqueles usados pelos instrumentos topográficos convencionais.

Para compatibilizar as coordenadas obtidas com a tecnologia GNSS com as coordenadas topográficas, obtidas pela topografia convencional, diversos métodos

podem ser utilizados. Dentre eles, podem ser citados a Transformação de Helmert, a Transformação Afim, a Transformação de Coordenadas Geocêntricas em Topocêntricas (Matriz de Rotação e Translação) e a Transformação de Coordenadas Geodésicas em Coordenadas Plano Retangulares utilizando o Sistema Topográfico Local (STL), cuja formulação é apresentada na NBR 14.166/98.

A partir desses métodos, as coordenadas obtidas por GNSS podem ser compatibilizadas com o sistema topográfico e utilizadas para a implantação de pontos de projetos no terreno.

A situação crítica para a engenharia de obras ocorre, por exemplo, quando se deseja compensar uma poligonal apoiada em pontos com coordenadas UTM determinadas pela tecnologia GNSS, e vértices intermediários medidos com estação total. Neste caso, a solução pode ser reduzir as distâncias topográficas para a projeção UTM e compensar a poligonal no plano de projeção ou transformar as coordenadas UTM para o plano topográfico local e compensar a poligonal nesse plano. Em geral, os engenheiros civis preferem a segunda opção por considerá-la mais adequada aos projetos de engenharia civil.

Ocorre, porém, que em muitos casos, o engenheiro deseja implantar os pontos projetados para a obra com o uso de instrumentos da tecnologia GNSS em modo diferencial RTK. Neste caso, é necessário transformar novamente os pontos com coordenadas no plano local, do projeto, para coordenadas UTM para que possam ser implantadas com receptores GNSS em modo diferencial RTK. A questão levantada é se essa dupla transformação por métodos diferentes causa distorções na geometria do projeto.

Para ajudar a responder essa questão, este artigo apresenta um estudo de caso em que se levantou uma poligonal geometricamente aberta e topograficamente apoiada, medindo-se todos os seus vértices com receptores GNSS e com estação total, se compensou a poligonal e comparou os resultados obtidos.

## 2 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A transformação de coordenadas corresponde a uma operação matemática, que relaciona dois sistemas de coordenadas, com o objetivo de obter a posição de um ponto conhecido em um sistema, no outro (SILVA e SEGANTINE, 2015). Há na literatura autores que preferem fazer uma diferenciação entre conversão e transformação de coordenadas. Wolf et al. (2014) refere-se a conversão de coordenadas como sendo processos matemáticos exatos, que apenas alteram a representação matemática dos pontos para uma outra forma, ou seja, muda-se apenas a apresentação dos valores de coordenadas e mantém-se inalterado o datum, enquanto que a transformação consiste em um processo matemático não exato, uma vez que é baseada em medições e estas contêm erros. Contudo, neste artigo, mantém-se o termo transformação, indistintamente.

Em tempos de popularização do uso da tecnologia GNSS e de maior acessibilidade às informações georreferenciadas nos mais diversos segmentos, torna-se cada vez mais conveniente utilizar sistemas planos topográficos, devido à sua facilidade de uso e de entendimento técnico.

Para fins de aplicação em obras de engenharia, pode-se obter coordenadas no Plano Topográfico Local (PTL) por intermédio da aplicação da Matriz de Rotação e Translação. Nesse método, como são empregadas coordenadas tridimensionais, não há a influência da diferença de nível, ou seja, o fator de ampliação ou redução é eliminado, podendo ser adotado qualquer altura para o PTL (DAL'FORNO et al., 2010).

Apesar de pouco utilizado no Brasil, o método apresentado pela NBR 14.166/98 foi empregado em países como Estados Unidos e Japão (IDOETA, 2005). Contudo, esse método apresenta limitações. Garnes et al. (2005) destaca as questões relativas à dimensão máxima do PTL que é de 100x100 km e Dal'Forno et al. (2010) aponta a necessidade de subdividir o sistema em dois parciais, caso na área estabelecida ocorra um desnível máximo maior que 150,00 m.

## 3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PLANAS

Para realizar a transformação de coordenadas planas entre sistemas diferentes é necessário que sejam conhecidas as coordenadas de pontos homólogos em ambos os sistemas. O processo de transformação de coordenadas, neste caso, consiste em relacionar os pontos homólogos de modo que possam ser determinados os parâmetros da transformação.

Uma vez determinados os parâmetros, eles são aplicados aos demais pontos, de forma a fornecerem as coordenadas destes no segundo sistema. Vale ressaltar que os valores obtidos para os parâmetros da transformação dependerão da distribuição dos pontos escolhidos e da qualidade de suas coordenadas, ou seja, eles dependem exclusivamente dos pontos homólogos escolhidos.

Na literatura, como por exemplo, em Silva e Segantine (2015), encontram-se apresentadas as equações relativas a dois métodos de transformação de coordenadas retangulares planas, que são:

- Transformação Ortogonal ou de Semelhança (Transformação de Helmert 2D);
- Transformação Afim.

A NBR 14.166/98 apresenta o conceito de plano topográfico local e apresenta, em seu anexo A as fórmulas utilizadas para transformar as coordenadas geodésicas em coordenadas plano retangulares no sistema topográfico local, o qual é utilizado nos levantamentos topográficos apoiados na Rede de Referência Cadastral.

### 3.1 Transformação Ortogonal ou de Semelhança (Helmert 2D)

Esta transformação consiste em três etapas, baseando-se em quatro parâmetros, que são:

- Ângulo de rotação ( $\theta$ );
- Fator de escala ( $k$ );
- Translações ( $T_X$  e  $T_Y$ ).

A primeira etapa tem o objetivo de tornar os eixos do sistema A paralelos aos eixos do sistema B aplicando um ângulo de rotação  $\theta$ . A segunda etapa consiste em aplicar um fator de escala  $k$  às coordenadas do sistema rotacionado, de modo a manter as dimensões equivalentes entre os dois sistemas. Por último, é aplicada uma translação na origem do sistema B, para que suas coordenadas possam ser obtidas no sistema A. Para isso são aplicadas translações no eixo (X) e no eixo (Y) no sistema B.

Os parâmetros da transformação de coordenadas, neste caso, podem ser obtidos aplicando-se a equação (1).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = k * \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \end{bmatrix} \quad (1)$$

Como se nota nas equações, para que seja possível realizar a transformação de coordenadas, é necessário haver pelo menos dois pontos homólogos entre os sistemas, visto que para cada ponto são escritas duas equações, uma para o eixo (X) e outra para o eixo (Y), permitindo assim a determinação dos parâmetros da transformação.

Para os casos em que há mais de dois pontos homólogos, ocorre a existência de um excesso de pontos homólogos entre os sistemas, resultando em uma redundância nos resultados.

Com isso, a partir de cada ponto  $i$  conhecido em ambos os sistemas são montadas as equações (1), as quais correspondem às equações de observação. Essas equações podem ser reescritas em função dos parâmetros desconhecidos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$ , obtendo-se as equações (2) apresentadas a seguir:

$$\begin{bmatrix} V_{X_i} \\ V_{Y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

As equações (2) podem ser expressas na forma matricial, conforme apresentado na equação (3),

$$V = A * X - L \quad (3)$$

sendo, A a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas, ou seja, a matriz dos parâmetros a serem determinados, L o vetor das observações e V o vetor dos resíduos.

O sistema com as observações redundantes é solucionado pela equação (4),

$$X = (A^T * P * A)^{-1} * A^T * P * L \quad (4)$$

sendo, P a matriz diagonal dos pesos, a qual é composta pelos desvios padrões das coordenadas (X,Y) do sistema origem. Desta forma, a matriz X é composta pelos valores mais prováveis dos parâmetros desconhecidos da transformação entre os sistemas (X, Y) e (X', Y').

Assim, após o ajustamento, podem ser calculados o fator de escala ( $k$ ) e o ângulo de rotação ( $\theta$ ) entre os sistemas, aplicando as equações (5) e (6), respectivamente.

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \quad (6)$$

Uma das vantagens em se utilizar essa transformação é que os erros nas coordenadas podem ser detectados e a precisão das coordenadas obtidas pode ser calculada, sendo por esse motivo, aconselhado o uso de redundâncias nas transformações, sempre que possível (WOLF et al., 2014).

A solução também pode ser obtida a partir de um rearranjo das equações do sistema de equações normais do Método de Ajustamento Paramétrico (SILVA e SEGANTINE, 2015). A sequência de cálculos pode ser vista detalhadamente nessa referência.

### 3.2 Transformação Afim

De modo análogo a Transformação Ortogonal, a Transformação Afim exige o conhecimento das coordenadas dos pontos homólogos entre os dois sistemas a serem relacionados, para que seja possível determinar os parâmetros da transformação.

Nesta transformação devem ser determinados seis parâmetros:

- Dois fatores de escala: um no eixo X ( $k_X$ ) e outro no eixo Y ( $k_Y$ );
- Ângulo de rotação ( $\alpha$ );
- Ângulo de não ortogonalidade ( $\delta$ );
- Translações ( $T_X$  e  $T_Y$ ).

Wolf et al. (2014), considera que a Transformação Afim consiste em quatro etapas básicas: a) Aplicação do fator de escala nos eixos (X) e (Y); b) Correção da não ortogonalidade entre os eixos x e y; c) Aplicação do ângulo de rotação; d) Translação da origem do sistema.

A relação matemática entre os dois sistemas, neste caso, é descrita pelas equações (7).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ d & e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pelo fato de haver seis parâmetros a serem determinados, torna-se necessário haver, no mínimo, três pontos homólogos em ambos os sistemas, visto que para cada ponto são escritas duas equações, uma para o eixo (X) e outra para o eixo (Y), permitindo assim a determinação dos parâmetros da transformação.

Para os casos em que há mais de três pontos homólogos, ocorre a existência de um excesso de pontos homólogos entre os sistemas, resultando em uma redundância nos resultados. Nestes casos, a solução é obtida a partir da aplicação do Método Paramétrico de ajustamento de observações.

Assim, para cada ponto  $i$  conhecido em ambos os sistemas se montam as equações (7). Tem-se assim o sistema de equações (8), que relaciona os erros residuais com os parâmetros desconhecidos  $a, b, c, d, e$  e  $f$ .

$$\begin{bmatrix} V_{X_i} \\ V_{Y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ d & e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

A equação (8) pode ser expressa na forma matricial, conforme apresentado na equação (3) e a solução do sistema é obtida pela equação (4).

Os parâmetros desconhecidos  $a, b, c, d, e$  e  $f$ , são determinados após o cálculo do ajustamento das observações. Com isso, os fatores de escala ( $k_X$  e  $k_Y$ ), o ângulo de rotação ( $\theta$ ) entre os sistemas e o ângulo de não ortogonalidade ( $\delta$ ) podem ser calculados utilizando as equações (9), (10), (11) e (12), respectivamente:

$$k_X = \sqrt{a^2 + d^2} \quad (9)$$

$$k_Y = \sqrt{b^2 + e^2} \quad (10)$$

$$\delta = \arctg\left(\frac{d}{a}\right) \quad (11)$$

$$\alpha = -\left[\left(\arctg\frac{e}{b}\right) + \delta\right] \quad (12)$$

A solução também pode ser obtida a partir de um rearranjo das equações do sistema de equações normais do Método de Ajustamento Paramétrico (SILVA e SEGANTINE, 2015). A sequência de cálculos pode ser vista detalhadamente nessa referência.

### 3.3 Transformação de Coordenadas Geocêntricas em Topocêntricas

Este método de transformação envolve dois sistemas de coordenadas espaciais, sendo que em um deles, o centro de massa da Terra é considerado o centro do sistema de coordenadas, recebendo, portanto, a denominação de Geocêntrico. O sistema Topocêntrico por

sua vez, possui como centro do sistema um ponto localizado na superfície terrestre.

As coordenadas no Sistema Cartesiano Geocêntrico são caracterizadas pelo terno (X, Y, Z), sendo, o plano XY gerado pelo plano equatorial médio perpendicular ao eixo Z (eixo de rotação médio da Terra) e o plano XZ gerado pelo plano meridiano médio de Greenwich (TORGE, 1991).

De acordo com Silva e Segantine (2015), o Sistema de Coordenadas Topocêntrico possui o eixo (X) perpendicular ao eixo (Y), o eixo (Y) coincidente com a direção do meridiano do lugar e o eixo (Z) coincidente com a Normal do lugar, sendo respectivamente representados pelas coordenadas (u, t, v).

Na transformação das coordenadas geocêntricas em topocêntricas são envolvidas rotações e translações dos eixos. A equação (13) permite realizar tal transformação.

$$\begin{bmatrix} u_p \\ t_p \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda_0 & \text{cos}\lambda_0 & 0 \\ -\text{sen}\varphi_0\text{cos}\lambda_0 & -\text{sen}\varphi_0\text{sen}\lambda_0 & \text{cos}\varphi_0 \\ \text{cos}\varphi_0\text{cos}\lambda_0 & \text{cos}\varphi_0\text{sen}\lambda_0 & \text{sen}\varphi_0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_p - X_0 \\ Y_p - Y_0 \\ Z_p - Z_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sendo,

$u_p, t_p$  e  $v_p$ : coordenadas topocêntricas do ponto  $p$ ;

$\varphi_0$  e  $\lambda_0$ : coordenadas geodésicas do ponto origem do sistema topocêntrico;

$X_p, Y_p$  e  $Z_p$ : coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto  $p$ ;

$X_0, Y_0$  e  $Z_0$ : coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto origem do sistema topocêntrico.

### 3.4 Transformação de Coordenadas Geodésicas em Coordenadas Plano-Retaangulares utilizando no Sistema Topográfico Local – NBR 14.166/98

A NBR 14.166 de agosto de 1.998 é a norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) que trata sobre as exigências e procedimentos a serem seguidos para a implantação da Rede de Referência Cadastral em municípios brasileiros.

Dentre outras abordagens, essa norma define o sistema topográfico local (STL), o plano topográfico local e o sistema de coordenadas plano-retangulares.

Os pontos obtidos, por intermédio de levantamento topográfico em campo, são representados em coordenadas plano-retangulares no PTL do sistema topográfico local.

O STL tem origem em um ponto de coordenadas geodésicas conhecidas, no qual o PTL tangencia a superfície de referência (elipsoide).

Assim, as coordenadas geodésicas referenciadas à superfície de referência (elipsoide) podem ser relacionadas às coordenadas plano-retangulares no STL, segundo a NBR 14.166/98. As equações utilizadas na transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no STL, de acordo com a NBR 14.166/98, estão apresentadas a seguir:

**Cálculo dos elementos geodésicos:**

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (14)$$

$$M_0 = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt[3]{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)}} \quad (15)$$

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)}} \quad (16)$$

$$R_0 = \sqrt{M_0 \times N_0} \quad (17)$$

$$N_p = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_p)}} \quad (18)$$

Sendo,

a = semieixo maior do elipsoide de referência;

b = semieixo menor do elipsoide de referência;

e = primeira excentricidade do elipsoide de referência;

M<sub>0</sub> = raio de curvatura da seção meridiana do elipsoide de referência na origem do sistema (P<sub>0</sub>);

N<sub>0</sub> = raio de curvatura da seção normal ao plano meridiano do elipsoide de referência em (P<sub>0</sub>);

N<sub>p</sub> = raio de curvatura da seção normal ao plano meridiano do elipsoide de referência em (P<sub>0</sub>);

R<sub>0</sub> = raio médio local de curvatura terrestre.

A adoção do raio médio gaussiano é feita em aplicações em que é conveniente considerar a Terra como sendo esférica em vez de elipsoidal (RAPP, 1991). Assim, na latitude do ponto P<sub>0</sub>, a curvatura gaussiana R<sub>0</sub> apresenta o mesmo raio do elipsoide.

**Cálculo dos coeficientes B, C, D, E:**

$$B = \frac{1}{M_0 \text{arc } 1''} \quad (19)$$

$$C = \frac{\tan \varphi_0}{2M_0 N_0 \text{arc } 1''} \quad (20)$$

$$D = \frac{3e^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \text{arc } 1''}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)} \quad (21)$$

$$E = \frac{1 + 3 \tan \varphi_0}{6N_0^2} \quad (22)$$

Sendo,

φ<sub>0</sub> = latitude geodésica do ponto (P<sub>0</sub>);

λ<sub>0</sub> = longitude geodésica do ponto (P<sub>0</sub>).

Na aplicação das fórmulas, devem-se considerar os sinais negativos para latitudes no hemisfério sul e para longitudes a oeste do Meridiano de Greenwich.

**Cálculo do fator de elevação:**

$$c = \frac{R_0 + H_t}{R_0} \quad (23)$$

Sendo,

H<sub>t</sub> = altitude ortométrica média do terreno (altitude do plano topográfico local).

**Cálculo das Coordenadas Plano-retangulares (X<sub>L</sub>, Y<sub>L</sub>):**

$$\Delta \lambda = \lambda_p - \lambda_0 \quad (24)$$

$$\Delta \varphi = \varphi_p - \varphi_0 \quad (25)$$

$$\Delta \lambda_1 = \Delta \lambda [1 - 3,9173 \times 10^{-12} (\Delta \lambda'')^2] \quad (26)$$

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi [1 - 3,9173 \times 10^{-12} (\Delta \varphi'')^2] \quad (27)$$

$$x_p = -\Delta \lambda \cos \varphi_p N_p \text{arc } 1'' c \quad (28)$$

$$y_p = \frac{1}{B} [\Delta \varphi_1 + C x_p^2 + D (\Delta \varphi_1)^2 + E (\Delta \varphi_1) x_p^2 + E C x_p^4] \quad (29)$$

$$X_L = 150.000 + x_p \quad (30)$$

$$Y_L = 250.000 + y_p \quad (31)$$

**4 TRANSFORMAÇÃO ALTIMÉTRICA**

Para o caso da componente altimétrica, para compatibilizar as diferentes alturas obtidas em função dos sistemas de coordenadas utilizados, é necessário também utilizar um processo matemático, que permita realizar essa compatibilização adequadamente.

Quando se utiliza a tecnologia GNSS nos levantamentos de campo obtêm-se altura elipsoidal (h), com relação ao elipsoide especificado (JEKELI, 2016).

Esta altura não possui relação com a gravidade e, portanto, não tem utilidade prática, visto que, para fins de obras de engenharia, utiliza-se a altitude ortométrica (H), a qual possui como referência o nível médio dos mares (SHOFIELD e BREACH, 2007).

A relação entre a altitude ortométrica e a altura elipsoidal é dada pela equação (32), o que exige o conhecimento do valor da ondulação geoidal (N) no ponto considerado.

$$H = h - N \quad (32)$$

Os valores altimétricos provenientes de um levantamento utilizando a tecnologia GNSS, altura geométrica ou a altitude ortométrica, obtidos a partir de um modelo geoidal, podem ser transformados em um plano local, aplicando-se um modelo matemático (GUILANI e WOLF, 2012).

Esse modelo baseia-se na aplicação de uma translação e duas rotações entre os dois planos altimétricos. Por intermédio das rotações, se corrige a

obliquidade entre as superfícies e a translação os colocam coincidentes, conforme indicado na equação (33).

$$T_0 + r_e * N_{GNSS} + r_n * E_{GNSS} = H_L - H_{GNSS} + v \quad (33)$$

Sendo,

$E_{GNSS}$  e  $N_{GNSS}$  : Coordenadas projetadas obtidas pela tecnologia GNSS;

$H_{GNSS}$  : Altura geométrica ou altitude ortométrica obtida utilizando um modelo geoidal;

$H_L$  : Altura local dos pontos.

Como pode ser visto, a equação (33) envolve três parâmetros desconhecidos. Com isso, conhecendo-se, no mínimo três pontos com alturas locais ( $H_L$ ), pode se determinar tais parâmetros. Entretanto, para que haja redundância de observações, no mínimo um quarto ponto deve ser inserido, para que, aplicando o ajustamento de observações, se obtenha os valores mais prováveis dos parâmetros desconhecidos.

## 5. ESTUDO DE CASO

Para aplicação das equações e verificação da qualidade dos modelos de transformação de coordenadas apresentados, realizou-se o levantamento de uma poligonal geometricamente aberta e topograficamente apoiada, com dois pontos de controle em cada um de seus extremos. As coordenadas dos pontos de controle foram determinadas com medições da tecnologia GNSS em modo estático, sendo posteriormente utilizados como estações base para o processamento dos demais pontos da poligonal, os quais foram rastreados aplicando o método de posicionamento estático rápido com sessões de rastreio de 5 minutos e taxa de coleta de 1 segundo.

As direções e distâncias entre os pontos intermediários da poligonal foram medidos com uma estação total. A poligonal levantada possui extensão de 1,8 km e foi realizada ao longo de uma via urbana na cidade de São Carlos, cuja área apresenta relevo com desnível máximo da ordem de 56 metros.

Pelo fato das coordenadas dos pontos extremos da poligonal terem sido determinadas com medições da tecnologia GNSS e os pontos intermediários com uma estação total, existem incompatibilidades entre os planos de referência, sendo necessário, portanto, aplicar uma transformação de coordenadas para compatibilizá-los e assim realizar a compensação da poligonal.

A solução adotada, neste caso, consistiu em estabelecer um PTL, de acordo com as equações indicadas na NBR 14.166/98, e transformar as coordenadas dos pontos extremos da poligonal para esse plano. Adotou-se como origem do PTL o ponto  $P_0$  de coordenadas iguais a  $(-22^\circ 00' 45,89922''; -51^\circ 53' 11,46280'')$ .

A Figura 1 apresenta o croqui do caminhamento, os pontos de partida e chegada da poligonal e o ponto origem do PTL.

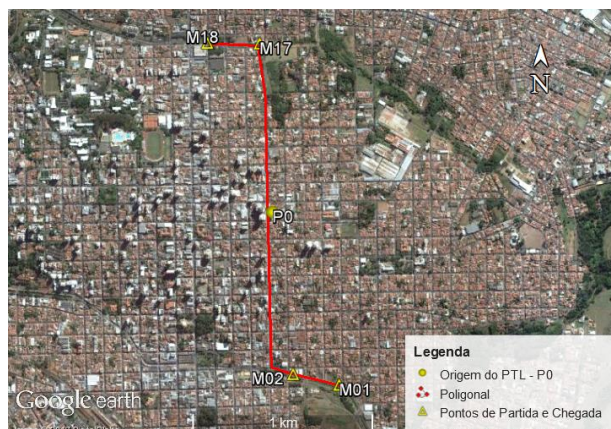


Figura 1 – Croqui da poligonal.

Com base nesses dados, se realizou o cálculo da poligonal, obtendo-se os erros de fechamento indicados na Tabela 1.

Tabela 1 – Erros de fechamento da poligonal.

|                         |              |
|-------------------------|--------------|
| <b>Erro Angular</b>     | 00° 00' 01'' |
| <b>Erro Altimétrico</b> | 0,0025 m     |
| <b>Precisão Linear</b>  | 1:131.487    |

Com a poligonal compensada, têm-se os valores das coordenadas de todos os seus vértices no PTL.

Considera-se, nesta etapa, que se deseja implantar outros pontos na região do levantamento com um instrumento GNSS operando em modo diferencial RTK. Neste caso, haverá a necessidade de realizar uma transformação de coordenadas cartesianas planas para voltar ao sistema de projeção para, em seguida, implantar os pontos desejados com o instrumento GNSS.

Assim, para efeito da transformação, considerou-se as coordenadas UTM obtidas com a tecnologia GNSS como sendo o sistema A e as coordenadas topográficas locais obtidas no cálculo da poligonal como sendo as coordenadas no Sistema B.

Foram utilizados os pontos M01, M02, M17 e M18 como pontos homólogos em ambos os sistemas. Na Tabela 2 estão apresentadas as coordenadas dos pontos homólogos no sistema A, determinados com a tecnologia GNSS.

Tabela 2 – Pontos homólogos no Sistema A.

| <b>Coordenadas Projetadas – SIRGAS2000 UTM23S</b> |              |               |              |
|---|--------------|---------------|--------------|
| <b>Pontos</b>                                     | <b>E (m)</b> | <b>N (m)</b>  | <b>h (m)</b> |
| <b>M01</b>  | 202.354,879  | 7.562.002,398 | 807,292      |
| <b>M02</b>  | 202.097,654  | 7.562.054,880 | 803,748      |
| <b>M17</b>  | 201.891,443  | 7.563.858,697 | 821,794      |
| <b>M18</b>  | 201.602,442  | 7.563.870,095 | 819,175      |

As coordenadas dos pontos homólogos no sistema B, obtidas com a transformação de coordenadas, estão apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Pontos homólogos no Sistema B.

| Coordenadas Topográficas Locais |             |             |         |
|---------------------------------|-------------|-------------|---------|
| Pontos                          | X (m)       | Y (m)       | H (m)   |
| <b>M01</b>                      | 150.350,169 | 249.049,625 | 813,433 |
| <b>M02</b>                      | 150.094,125 | 249.106,927 | 809,906 |
| <b>M17</b>                      | 149.922,133 | 250.913,298 | 827,947 |
| <b>M18</b>                      | 149.633,562 | 250.930,144 | 825,328 |

Primeiramente aplicou-se o Método de Transformação de Coordenadas de Helmert, por intermédio do método de ajustamento paramétrico, obtendo-se os parâmetros indicados na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros ajustados da Transformação de Helmert e suas respectivas precisões.

|              |               |           |
|--------------|---------------|-----------|
| <b>a</b>     | 1,000386336   | 5,152E-07 |
| <b>b</b>     | 0,018906391   | 5,153E-07 |
| <b>c (m)</b> | 56.655,254    | 1,504E-01 |
| <b>d (m)</b> | 7.310.013,976 | 1,499E-01 |

A partir dos parâmetros da Transformação de Helmert determinados no ajustamento, foram calculadas de volta as coordenadas planas dos pontos homólogos no sistema A. Os valores obtidos estão apresentados na Tabela 5, juntamente com suas respectivas precisões.

Tabela 5 – Coordenadas calculadas com os parâmetros ajustados – Helmert.

| Pontos     | E (m)       | N (m)         | $\sigma E$ (m) | $\sigma N$ (m) |
|------------|-------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>M01</b> | 202.354,879 | 7.562.002,397 | 0,001          | 0,001          |
| <b>M02</b> | 202.097,653 | 7.562.054,880 | 0,001          | 0,001          |
| <b>M17</b> | 201.891,443 | 7.563.858,697 | 0,001          | 0,001          |
| <b>M18</b> | 201.602,442 | 7.563.870,094 | 0,001          | 0,001          |

Em seguida realizou-se o Método de Transformação de Coordenadas Afim, por intermédio do método de ajustamento paramétrico, obtendo-se os parâmetros indicados na Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros ajustados da Transformação Afim e suas respectivas precisões.

|              |               |            |
|--------------|---------------|------------|
| <b>a</b>     | 1,000383021   | 3,691E-07  |
| <b>b</b>     | 0,018907335   | 2,444E-07  |
| <b>c (m)</b> | 56.655,988    | 7,892E-02  |
| <b>d</b>     | 0,018916729   | 3,588E-07  |
| <b>e</b>     | 1,000389398   | 2,421E-07  |
| <b>f (m)</b> | 7.310.011,660 | 7,667 E-02 |

Os valores das coordenadas calculadas a partir dos parâmetros ajustados da Transformação Afim, bem como suas respectivas precisões, são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Coordenadas calculadas com os parâmetros ajustados – Afim.

| Pontos     | E (m)       | N (m)         | $\sigma E$ (m) | $\sigma N$ (m) |
|------------|-------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>M01</b> | 202.354,879 | 7.562.002,398 | 0,002          | 0,002          |
| <b>M02</b> | 202.097,654 | 7.562.054,879 | 0,003          | 0,002          |
| <b>M17</b> | 201.891,442 | 7.563.858,700 | 0,001          | 0,001          |
| <b>M18</b> | 201.602,442 | 7.563.870,093 | 0,002          | 0,002          |

Com os parâmetros de transformação calculados, foram calculadas as coordenadas planas UTM dos demais vértices da poligonal para ambos os métodos de transformação de coordenadas.

Para verificação da qualidade dos resultados, as coordenadas dos mesmos vértices foram determinadas com o uso da tecnologia GNSS, o que permitiu calcular as diferenças entre as coordenadas calculadas e as transformadas, conforme apresentado na Tabela 8.

Tabela 8 – Discrepâncias entre as coordenadas.

| Pontos     | Helmert |        | Afim   |        |
|------------|---------|--------|--------|--------|
|            | X (mm)  | Y (mm) | X (mm) | Y (mm) |
| <b>M01</b> | -0,1    | 0,9    | 0,0    | 0,0    |
| <b>M02</b> | 0,5     | -0,8   | -0,2   | 0,8    |
| <b>M17</b> | 0,3     | -1,0   | 0,7    | -3,2   |
| <b>M18</b> | 0,1     | 1,1    | -0,4   | 1,8    |
| <b>M03</b> | -28,6   | 10,5   | -29,6  | 13,1   |
| <b>M04</b> | -2,4    | 5,2    | -3,4   | 7,6    |
| <b>M05</b> | -0,9    | -4,7   | -1,8   | -2,6   |
| <b>M06</b> | -17,1   | 3,5    | -17,9  | 5,3    |
| <b>M07</b> | -3,8    | -11,6  | -4,5   | -10,2  |
| <b>M09</b> | -10,6   | -6,2   | -11,1  | -5,3   |
| <b>M10</b> | 11,1    | 16,9   | 10,6   | 17,4   |
| <b>M11</b> | 7,6     | -18,8  | 7,2    | -18,6  |
| <b>M13</b> | 6,8     | 11,9   | 6,7    | 11,6   |
| <b>M14</b> | 0,3     | -14,6  | 0,2    | -15,2  |
| <b>M15</b> | 5,0     | -3,1   | 5,0    | -4,0   |
| <b>M16</b> | -5,1    | -13,4  | -4,7   | -15,2  |

Analisando a Tabela 8, nota-se que as discrepâncias obtidas em ambas as transformações apresentam valores próximos. Em média, os valores de discrepâncias calculadas em Helmert e Afim, foram respectivamente iguais a 6,3 mm  $\pm$  1,9 mm e 6,5 mm  $\pm$  2,0 mm para a componente X e de 7,7 mm  $\pm$  1,5 mm e 8,2 mm  $\pm$  1,6 mm para a componente Y.

Observa-se, em geral, que as maiores discrepâncias foram detectadas para os pontos localizados em regiões que apresentam fatores que favorecem a ocorrência de multicaminhamento (prédios, árvores, etc), associado a curta sessão de rastreamento (5 minutos).

Dando sequência ao estudo, independentemente das transformações planas realizadas e apresentadas, foi realizada a transformação das altitudes locais em alturas derivadas da tecnologia GNSS. Para isso, foram utilizados quatro pontos para o cálculo dos parâmetros da transformação, que são: – M02, M03, M16, M17.

A partir da equação (33), aplicando-se o ajustamento de observações, obteve-se os valores para os parâmetros  $T_0$ ,  $r_e$ ,  $r_n$ , indicados na Tabela 9.

Tabela 9 – Parâmetros ajustados da transformação altimétrica.

|           |         |
|-----------|---------|
| $T_0$ (m) | -36,671 |
| $r_e$ (") | 9,924   |
| $r_n$ (") | 25,395  |

A Tabela 10 apresenta as alturas geométricas calculadas a partir dos parâmetros obtidos no ajustamento.

Tabela 10 – Alturas geométricas calculadas pela transformação.

| Pontos | h (m)   | $\sigma_h$ (m) |
|--------|---------|----------------|
| M02    | 803,699 | 0,034          |
| M03    | 806,226 | 0,032          |
| M16    | 832,644 | 0,040          |
| M17    | 821,806 | 0,039          |

A partir dos parâmetros da transformação altimétrica obtidos no ajustamento, foram calculadas as alturas geométricas para os demais pontos. As discrepâncias calculadas estão apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11 – Valores de discrepâncias: Transformação altimétrica.

| Pontos | Discrepâncias (mm) |
|--------|--------------------|
| M02    | -48,9              |
| M03    | 5,5                |
| M16    | 16,6               |
| M17    | 12,2               |
| M01    | -37,1              |
| M04    | -7,7               |
| M05    | -18,5              |
| M06    | -23,6              |
| M07    | -29,3              |
| M09    | -25,8              |
| M10    | -15,6              |
| M11    | 12,4               |
| M13    | 8,1                |
| M14    | 33,0               |
| M15    | -6,5               |
| M18    | -22,6              |

Nota-se na Tabela 11 que as discrepâncias apresentam uma variação máxima e mínima de 48,9 e 5,5 mm, respectivamente.

As alturas geométricas transformadas apresentam o valor médio de discrepância igual a  $20,2 \text{ mm} \pm 3,1 \text{ mm}$ .

## 6. CONCLUSÃO

De maneira geral, os softwares de processamento de dados obtidos com a tecnologia GNSS, disponíveis no mercado, dispõem de ferramentas que possibilitam realizar transformações de coordenadas. Entretanto, embora haja essa disponibilidade, eles não contemplam o método estabelecido pela norma NBR 14.166/98. Cabe então a pergunta se a realização dessa transformação e posterior volta ao sistema UTM original não causa distorção no posicionamento dos pontos implantados com a tecnologia GNSS em modo diferencial RTK.

Como apresentado nesse artigo, as transformações de Helmert e Afim podem ser aplicadas como sendo alternativas em áreas de pequena dimensão. Para a área em questão, a aplicação prática da transformação de Helmert e Afim não apresentaram vantagens uma em relação a outra, sendo os resultados muito próximos, como pode ser visto pelos resíduos gerados.

Mostra-se assim que a opção de transformar as coordenadas UTM para o plano topográfico local, para permitir a compensação da poligonal, e a transformação inversa aplicando os métodos de transformação de Helmert ou Afim, para permitir a implantação de pontos com instrumentos GNSS em modo RTK, não causaram distorções significativas no posicionamento dos pontos a serem implantados considerando as limitações da metodologia adotada.

A extensão da validade da aplicação das transformações indicadas depende das dimensões da área de projeto. Não foram feitos testes para verificar essa dimensão. Os fabricantes de equipamentos GNSS, entretanto, indicam que as transformações de Helmert e Afim podem ser consideradas satisfatórias para áreas de até 10 e 15 km<sup>2</sup>, respectivamente. Pretende-se verificar essa afirmação na continuidade da pesquisa em desenvolvimento.

Os valores altimétricos obtidos no cálculo da transformação apresentaram resíduos de ordem centimétrica, utilizando apenas os quatro pontos extremos da área. No entanto, mais pontos distribuídos pela área podem ser acrescentados para o cálculo dos parâmetros da transformação altimétrica.

Desta forma, os resultados obtidos com este estudo de caso mostrou que, na situação avaliada, as transformações aplicadas podem ser consideradas uma solução adequada para a implantação e georreferenciamento de obras de engenharia civil, não havendo deformação geométrica significativa no conjunto de pontos avaliados.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio do engenheiro Marco Antonio Carvalho e dos alunos da pós-graduação do Departamento de Engenharia de Transportes no levantamento de dados de campo deste projeto.



## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14166 - Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimentos. Rio de Janeiro, 1998.
- DAL'FORNO, G. L. et al. **Transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas no plano topográfico local pelos métodos da norma NBR 14166:1998 e o de rotações e translações.** In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO, 3., 2010, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2010. Disponível em: <[https://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIII/IIISIMGEO\\_CD/](https://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIII/IIISIMGEO_CD/)>. Acesso em: 20 Out. 2016.
- GARNES, S., J., A.; SIQUEIRA, V. P.; CACHO, J., P. **Definição para implantação do sistema topográfico local de Campo Grande – MS e análise das fórmulas da NBR 14.166.** In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS, 4., 2005, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2005. Disponível em: <[http://www.ufrgs.br/igeo/departamentos/geodesia/c\\_not%C3%ADcias\\_arquivos/ANAIS\\_IISAPGU.pdf](http://www.ufrgs.br/igeo/departamentos/geodesia/c_not%C3%ADcias_arquivos/ANAIS_IISAPGU.pdf)>. Acesso em: 20 Out. 2016.
- GUILANI, C. D.; WOLF, P.R. **Elementary surveying: an introduction to geomatics.** 13th ed.: Pearson, 2012. 931p.
- IDOETA, I. V.; **Uso del plan topográfico local en obras lineales de ingeniería: caso autopista Presidente Dutra.** In: SEMANA GEOMÁTICA, 6., 2005, Barcelona. **Anais...** Barcelona: Intitut de Geomatica, 2005. Disponível em: <[http://www.isprs.org/proceedings/2005/semana\\_geomatica05/front/abstracts/dimarts8/G03.pdf](http://www.isprs.org/proceedings/2005/semana_geomatica05/front/abstracts/dimarts8/G03.pdf)>. Acesso em: 15 Nov. 2016.
- JEKELI, C. **Geometric reference systems in geodesy,** Division of Geodesy and Geospatial Science. School of Earth Sciences. Ohio State University, 2016. 214p.
- RAPP, R. H. **Geometric geodesy: part I,** notas de aula, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, USA, 1991. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1811/24333>>. Acesso em: 30/01/2017.
- SHOFIELD, W; BREACH, M. **Engineering surveying.** 6th ed. United Kingdom: Elsevier, 2007. 622p.
- SILVA, I.; SEGANTINE, P.C.L. **Topografia para engenharia: teoria e prática de geomática.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2015. 412p.
- TORGE, W. **Geodesy.** 2nd ed. New York: de Gruyter, 1991. 234p.
- WOLF, P. R.; Bon A. D., Benjamin, E. W. **Elements of photogrammetry with applications in GIS,** 4th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2014. 676p. Disponível em: <<https://www.accessengineeringlibrary.com/browse/elements-of-photogrammetry-with-applications-in-gis-fourth-edition#apxC>>. Acesso em: 30/01/2017.