

FOTOTRIANGULAÇÃO PLANIMÉTRICA POR MEIO DE DISTÂNCIAS RADIAIS

HÉBER FERREIRA MAFRA¹
JOÃO FERNANDO CUSTÓDIO DA SILVA²

Universidade Estadual Paulista – UNESP
Campus de Presidente Prudente
Faculdade de Ciências e Tecnologia - FCT
¹Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas
²Departamento de Cartografia
{heber, jfcsilva}@prudente.unesp.br

RESUMO - O presente artigo revisita o método analítico de triangulação radial com o propósito de avaliar sua potencialidade para os casos de atualização cartográfica e apoio didático. A finalidade deste projeto é a tentativa de recuperar o método de triangulação radial adaptando-o à utilização com fotografias digitais de pequeno formato obtidas com câmaras não métricas. Duas aplicações genéricas podem justificar a reutilização da triangulação radial: atualização cartográfica de áreas que não necessitam de alta precisão dos resultados e suporte didático ao ensino introdutório de fototriangulação em cursos de Fotogrametria. Para verificar a potencialidade do método, foi realizado uma simulação de um vôo fotogramétrico utilizando um bloco gerado artificialmente com duas faixas, treze fotos por faixa, sobreposição longitudinal de 60%, lateral de 30%, escala média das fotos da ordem de 1:10.000 e com uma variação da quantidade de pontos de controles. As vantagens do método proposto são o tamanho do bloco e a simultaneidade da solução, esta possibilita manter a ordem da precisão planimétrica em torno de 0,27 m no terreno, equivalentes a 27 μ m na foto.

ABSTRACT - The present article revisits the analytical method of radial triangulation with the intention to evaluate its potentiality for the cases of cartographic update and didactic support. The purpose of this project is the attempt to recoup the method of radial triangulation adapting it the use with gotten digital photographs of small format with no metric cameras. Two generic applications can justify the reutilization of the radial triangulation: cartographic update of areas that don't need high precision of the results and didactic support to the introductory education of phototriangulation in courses of photogrammetry. To verify the potentiality of the method, a simulation of a fotogramétrico flight was carried through using a block generated artificially with two bands, thirteen photos for band, longitudinal overlapping of 60%, lateral of 30%, scales average of the photos of the order of 1:10.000 and with a variation of the amount of points of control. The advantages of the considered method are the size of the block and the concurrence of the solution, this make possible to keep the order of the planimetric precision around 0,27 m in the land, equivalents 27 μ m in the photo.

1 INTRODUÇÃO

A triangulação radial surgiu após 1930 como um método fotogramétrico de extensão do controle horizontal sobretudo para construir mosaicos (semi) controlados e atualizar cartas topográficas. Os primeiros registros do método analítico datam da década de 50. O fundamento teórico impõe que as fotos aéreas sejam exatamente verticais tomadas sobre terreno plano, tal que se possa admitir a coincidência dos pontos principal e nadir. Obviamente, estas condições não ocorrem na realidade, de modo que a solução geral é apenas aproximada. Ainda que precária, a triangulação radial representou importante

passo no desenvolvimento da Fotogrametria como método de mapeamento topográfico planimétrico.

Ao nível atual da tecnologia fotogramétrica, o interesse em revisitar a triangulação radial é pouco chamativo à primeira vista. Entretanto, há um aspecto que merece atenção e que justifica a nova abordagem proposta neste trabalho. Os estudos realizados com a triangulação radial pararam apenas na dimensão planimétrica em qualquer dos métodos engenhados, a saber: gráfico, mecânico e analítico (MOFFITT & MIKHAIL, 1980). É possível, em tese, incluir a dimensão altimétrica no método analítico e esperar melhor estimativa para as coordenadas dos pontos no terreno. Isto pode ser conseguido por meio da ampliação do modelo matemático

das distâncias radiais, incluindo-se as coordenadas altimétricas dos pontos de terreno. Há um projeto de pesquisa em desenvolvimento com o propósito de investigar sua aplicação em projetos fotogramétricos para atualização cartográfica, cujos resultados serão comunicados oportunamente.

Hallert (1957), Turpin (1966), Mikhail (1968) e Wolf (1967) modelaram o método analítico com base em ângulos e distâncias, restringindo, entretanto, os projetos a apenas um par de fotos, evidentemente por causa das dificuldades de cálculo da época. Em seus experimentos, os pesquisadores acima referidos divulgaram resultados da ordem de alguns metros de precisão no terreno.

Com o presente trabalho, pretende-se demonstrar o alcance do método analítico de triangulação radial planimétrica com base nas distâncias radiais, por meio das quais as fotos do bloco são concatenadas. Sob a condição dos mínimos quadrados, com o método paramétrico de ajustamento das observações, a solução implementada estima simultaneamente as coordenadas planimétricas dos

pontos de terreno, o fator de escala médio de cada foto e os resíduos das distâncias radiais.

Além da questão da ampliação dimensional, de 2D para 3D, portanto de bi para tridimensional, há um aspecto de forte motivação para revisitar a triangulação radial, que é exatamente o apoio didático que o método analítico pode oferecer ao estudante que se inicia em Fotogrametria. Começar os estudos de fototriangulação pelo método radial é comum, não só pelo aspecto histórico, mas também pelo que ele representa em termos de facilidade para a compreensão dos fundamentos da aerotriangulação.

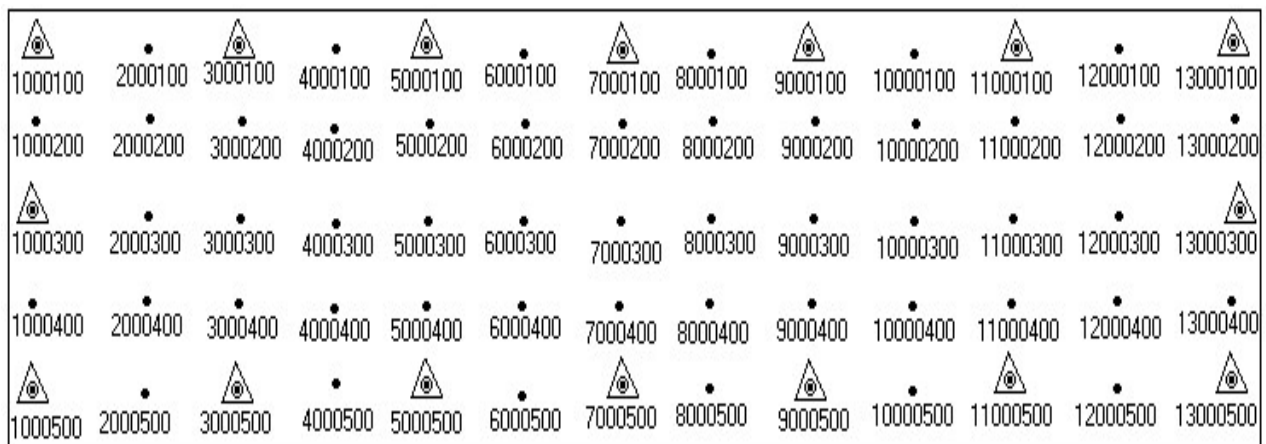


Figura 1 – Representação dos Pontos de Terreno.

O MÉTODO DAS DISTÂNCIAS RADIAIS

Considerando que as fotos aéreas são verticais, os deslocamentos dos pontos-imagem produzidos pelas variações do relevo, refração atmosférica, distorção radial das lentes e variações na altitude de vôo são radiais concorrentes no ponto principal.

O modelo matemático utilizado para relacionar os pontos de terreno aos pontos-imagem é a igualdade entre a equação da distância de dois pontos-imagem no plano da foto e a equação da distância dos dois pontos-objeto correspondentes, multiplicada por um fator de escala.

$$D_{ij} = \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$d_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$d_{ij} = I_k \cdot D_{ij} = I_k \cdot \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

A equação (1) calcula a distância entre dois pontos no terreno, a partir de suas coordenadas planimétricas ($X_i, Y_i; X_j, Y_j$) no sistema referencial local do terreno. A equação (2) calcula a distância correspondente no plano da foto, a partir das fotocoordenadas ($x_i, y_i; x_j, y_j$). Em ambas as equações, o índice i representa o ponto principal e o índice j representa os demais pontos de passagem em uma dada foto. A equação (3) iguala ambas as distâncias, considerando o fator de escala médio (I_k) da foto k .

Tendo por base a fig. 1 e imaginando-se uma foto aérea tomada de modo que o ponto principal coincida com o ponto 1000200, é possível escrever cinco equações do tipo (3). Os pontos 1000100, 2000100, 2000200, 2000300 e 1000300 devem ser considerados como de passagem (extremidade da distância) e o ponto 1000200 (principal) é a origem da distância, comum a todas as cinco equações. As fotocoordenadas são as observações naturais. Entretanto, o modelo matemático trata as distâncias radiais calculadas dos pontos de passagem aos pontos principais como pseudo-observações e as relacionam às incógnitas $I_k, X_i, Y_i; X_j, Y_j$.

3 ESTUDO SIMULADO

Com o fim de estudar e analisar o método ora proposto, o bloco de fotografias aéreas esquematizado na fig. 1 foi ajustado conforme as considerações do método de triangulação por meio das distâncias radiais.

Inicialmente foi feita uma simulação de um vôo fotogramétrico com as seguintes características: um bloco gerado artificialmente com duas faixas, treze fotos por faixa e sobreposição longitudinal de 60% e lateral de 30%, como mostra a fig. 1; foi imaginada uma câmara convencional de formato padrão 23x23 cm, de distância focal de 153 mm; a escala média das fotos da ordem de 1:10.000, com variação da altura de vôo de ± 50 m e variação dos ângulos de rotação \mathbf{v} e \mathbf{j} igual a $\pm 1^\circ$; a altura média do terreno de aproximadamente 130 m. As fotocordenadas geradas têm desvio padrão da ordem de 5 μm .

O programa computacional TRIRAD (TRIangulação RADial) foi elaborado para ajustar as observações e estimar as incógnitas do projeto em estudo. Da fig. 1, percebe-se que a linha dos pontos 1000200 a 13000200 representa a linha de vôo de uma faixa e a linha dos pontos 13000400 a 1000400 representa a linha de vôo da outra faixa. Todos os pontos-terreno têm coordenadas conhecidas, entretanto apenas os pontos representados por triângulos foram considerados como de apoio (os demais portanto funcionam como pontos de verificação).

As duas fotos extremas de cada faixa permitem que sejam calculadas cinco distâncias radiais em cada uma. As demais fotos (interior do bloco) permitem o cálculo de oito distâncias. Assim, há quatro fotos com cinco distâncias e 22 fotos com oito distâncias, totalizando 176 equações de distância radial, portanto, de (pseudo) observações.

Cada ponto-objeto contribui com duas incógnitas (X, Y) e cada foto com apenas uma (λ). Assim, os 65 pontos-terreno contribuem com 130 incógnitas, que somadas aos 26 fatores de escala, totalizam 156 parâmetros incógnitos.

De acordo com o acima exposto, as dimensões das matrizes A e N, referentes ao estudo em particular, são de 176 x 156 e 156 x 156, respectivamente. Os graus de liberdade são, portanto, 20 mais o número de equações de injeção de datum.

As tabelas 1, 2 e 3 resumem os resultados em termos de erro médio quadrático (emq) e desvio-padrão (dp) de três situações distintas quanto ao número de pontos de apoio (6, 10 e 16). No intuito de redimir eventuais dúvidas, entende-se “emq” como a raiz quadrada do somatório dos quadrados das discrepâncias entre as coordenadas X e Y conhecidas e estimadas pelo TRIRAD dividido pelo número de parcelas (discrepâncias) menos uma. Por “dp” entende-se a raiz quadrada positiva extraída da diagonal da matriz de covariâncias dos parâmetros, estimada portanto no ajustamento das observações. A média aritmética simples é calculada com os valores algébricos das discrepâncias.

Tabela 1 – Erro Médio Quadrático e Desvio-Padrão utilizando 6 Pontos de Apoio (1000100, 1000500, 7000100, 7000500, 3000100, 13000500).

Pontos de Controle	Erro Médio Quadrático (m)	Desvio Padrão Estimado (m)	Média Aritmética (m)
X	$\pm 0,020$	0,258	-0,012
Y	$\pm 0,000$	0,258	0,000
Pontos de Verificação			
X	$\pm 0,209$	0,305	0,021
Y	$\pm 0,168$	0,305	-0,001

O erro médio quadrático calculado por ponto de verificação é de 0,268 m no terreno, que correspondem a aproximadamente 0,0268 mm ou 26,8 μm na fotografia.

Tabela 2 – Erro Médio Quadrático e Desvio Padrão utilizando 10 Pontos de Apoio (1000100, 1000500, 4000100, 4000500, 7000100, 7000500, 10000100, 10000500, 13000100 e 13000500).

Pontos de Controle	Erro Médio Quadrático (m)	Desvio Padrão Estimado (m)	Média Aritmética (m)
X	$\pm 0,015$	0,265	- 0,007
Y	$\pm 0,061$	0,265	- 0,018
Pontos de Verificação			
X	$\pm 0,216$	0,295	0,022
Y	$\pm 0,163$	0,295	0,008

Neste caso, o “emq” é de 0,2706 m no terreno, que correspondem a aproximadamente 0,02706 mm ou 27,1 μm na fotografia. Também é menor do que o “dp”.

Tabela 3 – Erro Médio Quadrático e Desvio Padrão utilizando 16 Pontos de Apoio (1000100, 1000500, 3000100, 3000500, 5000100, 5000500, 7000100, 7000500, 9000100, 9000500, 11000100, 11000500, 13000100 e 13000500).

Pontos de Controle	Erro Médio Quadrático (m)	Desvio Padrão Estimado (m)	Média Aritmética (m)
X	0,072	0,262	- 0,022
Y	0,000	0,262	0, 00
Pontos de Verificação			
X	0,209	0,278	0,035
Y	0,182	0,278	- 0,004

Neste último caso, o “emq” é de 0,277 m no terreno, que correspondem a aproximadamente 0,0277 mm ou 27,7 μm na fotografia.

Em todos os casos, os “emq” foram menores do que os estimados (dp), sugerindo ausência de erros grosseiros (SILVA, 1987).

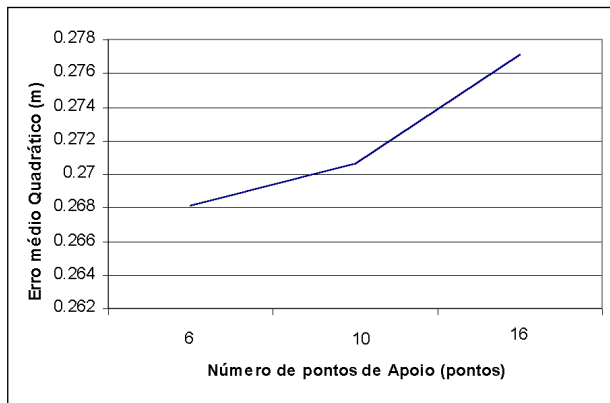


Figura 2 - Variação do erro médio quadrático em função do número de pontos de apoio.

Da fig. 2, nota-se que ocorre um pequeno aumento do erro médio quadrático em função da quantidade de pontos de apoio. Isto de certo modo, contraria a expectativa, pois sabe-se que o adensamento de uma rede planimétrica proporciona pequena melhoria no controle da propagação dos erros, quando triangulados pelo método dos feixes de raios SLAMA (1980). Neste caso, em particular, acredita-se que o aumento do número de pontos de apoio é prejudicial à acomodação dos erros, pois aparentemente torna a rede mais rígida (menos flexível), lembrando que o modelo matemático é aproximado. Pode-se dizer que a propagação dos erros não depende significativamente da quantidade de pontos de apoio (planimétricos).

Os resultados obtidos com o método das distâncias radiais estão próximos daqueles obtidos nos primórdios da triangulação radial. HALLERT (1957) relatou que o erro médio de um metro no terreno (plano) correspondeu a 22,6 μm nas fotos de escala 1:44000. TURPIN (1966) calculou erros planimétricos nos pontos principais entre 0,15 m e 0,30 m usando fotos aéreas verticais de escala 1:2400. WOLF (1967) triangulou par a par um bloco de nove fotos aéreas e calculou erros nos pontos de verificação variando de 1,7 m a 12,9 m. MIKHAIL (1968), com o mesmo bloco usado no trabalho anterior de Wolf, com variações no método, encontrou erros da ordem de 1,6 m a 12,6 m em sete pontos de verificação. Em conclusão, LUGNANI et al. (1977) resumem a precisão do método analítico de triangulação radial como sendo de 1/500 da altura de vôo.

Os destaques a serem feitos a favor dos resultados obtidos com o método ora proposto são o tamanho do bloco e a simultaneidade da solução; esta possibilita manter a ordem da precisão planimétrica em torno de 0,27 m no terreno, equivalentes a 27 μm na foto, ou aproximadamente 1/5000 da altura de vôo, melhor do que o relatado por MOFFITT & MIKHAIL (1980).

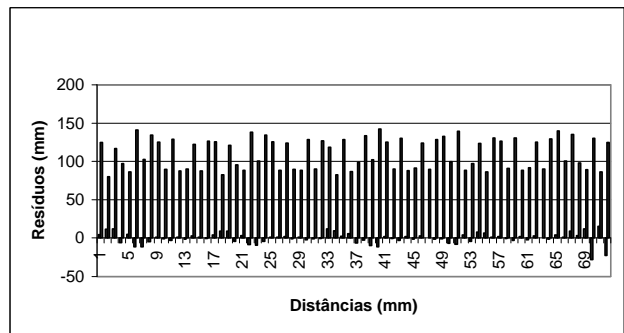


Figura 3 – Histograma dos resíduos das distâncias.

No histograma da fig. 4, percebe-se que a maioria dos resíduos são positivos. Em uma situação de modelagem matemática completa ou mais rigorosa, a média dos resíduos deveria tender a zero ($E\{V\} = 0$). A predominância dos valores positivos indica que os valores ajustados são maiores do que os observados ($L_a - L_b$), que por sua vez sugere que o alongamento da distância radial compensa ou reflete a falta da coordenada altimétrica Z. Em outras palavras, o bloco foi ajustado em um plano (coordenadas X, Y), cuja altura tem cota arbitrária igual a zero, portanto, abaixo da altura do plano médio do terreno.

4 NOVO MÉTODO

O estudo realizado baseia-se em equações de distâncias radiais calculadas apenas com coordenadas bidimensionais. Dessa maneira, o deslocamento do ponto-imagem devido à variação do relevo não é considerado, como mostra a fig. 4. Também não são considerados os ângulos horizontais entre essas distâncias com vértice no ponto principal (nadir). Assim, os erros residuais oriundos da modelagem incompleta ou aproximada influem diretamente no resultado final mediante a sua propagação da fotografia para o terreno, revelando-se na precisão das coordenadas estimadas dos pontos de passagem no terreno.

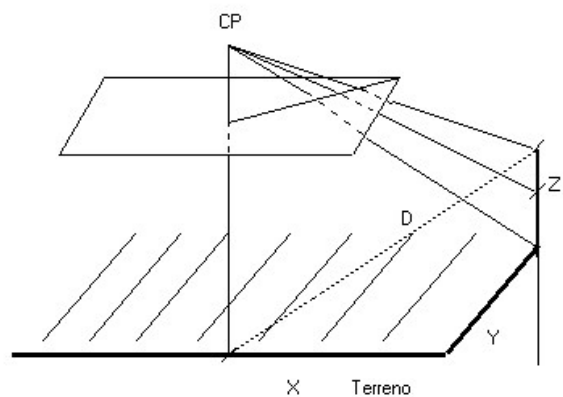


Figura 4 - Representação geométrica do deslocamento do ponto-imagem devido à variação da altura do ponto-objeto (coordenada altimétrica Z).

O novo modelo matemático é similar ao anterior. Entretanto, ele é enriquecido com três novas contribuições: a primeira possibilita calcular a distância espacial no terreno considerando também as coordenadas Z dos pontos-objeto; a segunda propõe o cálculo de um fator de escala para cada distância em cada foto (λ_{ij}^k) e a terceira incluirá as equações dos ângulos horizontais entre as distâncias radiais com vértice no ponto principal. As equações (4), (5), (6) e (7) representam o novo modelo matemático proposto para a triangulação radial analítica plano altimétrica, cuja solução está sendo implementada. Os resultados serão comunicados oportunamente.

$$D_{ij} = \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$d_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$d_{ij} = I_{ij}^k \cdot D_{ij} = I_{ij}^k \cdot \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\hat{\alpha} = \arccos \left(\frac{D_{ji}^2 + D_{jk}^2 - D_{ki}^2}{2 \cdot D_{ji} \cdot D_{jk}} \right) \quad (7)$$

A equação (4) calcula a distância entre dois pontos no terreno, à partir de suas coordenadas plano-altimétricas ($X_i, Y_i, Z_i; X_j, Y_j, Z_j$) no sistema referencial local do terreno. A equação (5) é idêntica a equação (3). Novamente, em ambas as equações, o índice i representa o ponto principal e o índice j representa os demais pontos de passagem em uma dada foto. A equação (6) iguala ambas as distâncias, considerando o fator de escala entre elas (I_{ij}^k). A equação (7) calcula o ângulo $\hat{\alpha}$ entre as respectivas distâncias (D_{ji}, D_{jk}, D_{ki}) no terreno, em relação os pontos i, j e k através da inversa da equação da lei dos cossenos.

Uma vantagem deste método é a diminuição dos efeitos devido à variação da escala das fotos, porque o modelo matemático incorpora um fator de escala (λ_{ij}^k) que “absorve” parcialmente os efeitos provocados pela variação do relevo das superfícies fotografadas, ponto a ponto.

Geralmente, o processo fotogramétrico exige a calibração da câmara, que pode aumentar o trabalho e o tempo necessários para a conclusão do projeto. A triangulação radial plano-altimétrica se apresenta com uma alternativa à calibração, porque prescinde da distância focal. Assim, abole-se a necessidade de calibrar câmaras não métricas, simplificando o processo de triangulação.

O método analítico de triangulação por meio de distâncias radiais pode ser usado em projetos fotogramétricos que não requerem grande precisão, como por exemplo, aplicações na agricultura, reflorestamento ou expansão urbana (atualização cartográfica).

O método proposto traz também uma contribuição acadêmica importante, porque permitirá aos professores antecipar o contato dos estudantes com o método de aerotriangulação. Assim, a teoria e a prática podem ser simplificadas, pelo menos no nível introdutório do

assunto, facilitando o aprendizado dos métodos dos modelos independentes e dos feixes de raios.

5 CONCLUSÕES

Com este artigo, pode-se perceber a viabilidade do método analítico de triangulação radial para a execução de um projeto fototriangulação, excluindo a necessidade de calibração. O estudo realizado pretendeu verificar o potencial deste método aproximado, para subsidiar a tese de que inserindo-se a componente altimétrica (coordenada Z), os resultados – acurácia principalmente – podem ser melhorados, em função da melhor modelagem matemática da superfície do terreno.

A simplicidade de execução do referido método, desde a medida das fotocoordenadas até a análise dos dados, o credencia para o apoio ao ensino e ao aprendizado em nível introdutório de aerotriangulação.

REFERÊNCIAS

- HALLERT, B. A New Method for Analytical Radial Triangulation. **Photogrammetric Engineering**, V. 23, p. 144 –148. 1957.
- LUGNANI, J. B.; DALMOLIN, Q.; QUINTINO, M. J. **Introdução à Fotogrametria**. V. 2, Curitiba: DAST, UFPR, 1977. 107p.
- MIKHAIL, E. A Study in Numerical Radial Triangulation. **Photogrammetric Engineering**, V. 34, p. 359-368. 1968.
- MOFFITT, F. ; MIKHAIL, E. **Photogrammetry**. New York: Harper&Row, 1980. 648p.
- SILVA, J. F. C. **A Inferência Bayesiana e a Detecção e Localização Automáticas de Erros Grosseiros em Fototriangulação por Feixes de Raios**. 1987. 88p. Tese de Doutorado - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- SLAMA, C. C.; Aerotriangulation. In: AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY. **Manual of Photogrammetry**. 4. ed. Falls Church, VA, 1980. p. 453-518.
- TURPIN, R. D. Numerical Radial Triangulation. **Photogrammetric Engineering**, V. 32, p. 1041-1045. 1966.
- WOLF, P. R. Analytical Radial Triangulation. **Photogrammetric Engineering**, V. 33, p. 109-115. 1967. 1980. 1056p.